75.12/95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.10 MODELACIÓN NUMÉRICA
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS
ECUACIONES NO LINEALES - EJEMPLOS

Ing. Rodolfo A. Schwarz

Año 2021

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Índice

Ejemplo 1

Un caso real en el cual hay que resolver una ecuación no lineal es la determinación de la longitud de onda de una ola oceánica en aguas de profundidad media.
En aguas profundas, la longitud de onda es:

$$L = \frac{g\,T^2}{2\,\pi},$$

donde L es la longitud de onda, g es la aceleración de la gravedad y T es el período de la ola.
En aguas poco profundas, la longitud de onda es:

$$L = \sqrt{g\,d}\,T,$$

donde L es la longitud de onda, g es la aceleración de la gravedad, d es la profundidad respecto del nivel de agua y T es el período de la ola.

Ejemplo 1

Finalmente, en aguas de profundidad media, la longitud de onda es:

$$L = \frac{g\,T^2}{2\,\pi} \tanh\left(\frac{2\,\pi}{L} d\right),$$

donde L es la longitud de onda, g es la aceleración de la gravedad, d es la profundidad y T es el período de la ola.

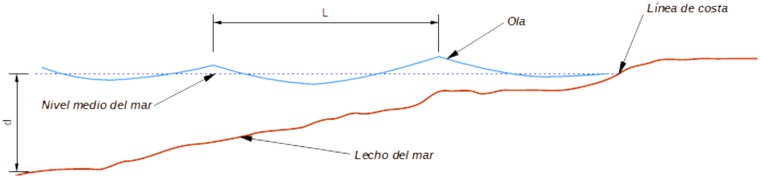

Figura: Ola y longitud de onda.

Ejemplo 1

Para resolver la ecuación, la reescribimos así:

$$f(L) = \frac{g\,T^2}{2\,\pi} \tanh\left(\frac{2\,\pi}{L} d\right) - L.$$

Definimos los valores de referencia y el intervalo:

- Profundidad: $d = 10 \text{ m}$,
- Período: $T = 8 \text{ s}$,
- Intervalo: $L \in (20 \text{ m}, 95 \text{ m})$.

Obtenemos $f(L)$ para los valores extremos del intervalo:

- Con $L_i = 20 \text{ m}$: $f(20 \text{ m}) = 79,52 \text{ m}$.
- Con $L_f = 95 \text{ m}$: $f(95 \text{ m}) = -37,14 \text{ m}$.

Ejemplo 1

Graficamos la función.

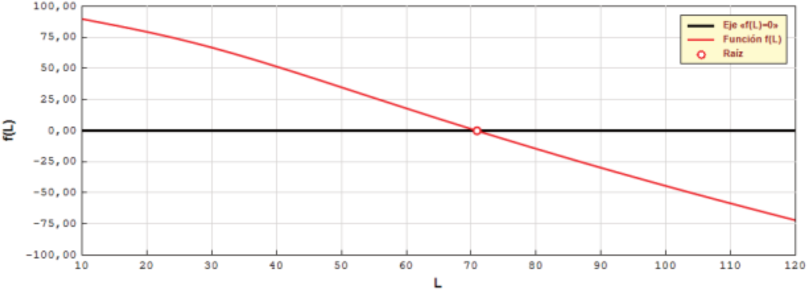

Figura: Función $f(L)$.

Ejemplo 1

Para obtener el valor buscado de L vamos a establecer el siguiente valor de tolerancia:

$$\varepsilon = 10^{-8},$$

y los siguientes criterios:

- Criterio 1:

$$|f(L_n)| \leq \varepsilon.$$

- Criterio 2:

$$\frac{|L_n - L_{n-1}|}{|L_n|} \leq \varepsilon.$$

- Criterio 3:

$$|L_n - L_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

y un valor máximo de iteraciones: $n = 100$.

Ejemplo 1

Método de la Bisección

Al aplicar el **Método de la Bisección**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{L_{33} = 70{,}88340808}, \quad f(L_{33}) = 3{,}49 \cdot 10^{-9}, \quad \frac{|L_{33} - L_{32}|}{|L_{33}|} = 7{,}2 \cdot 10^{-1}.$$

- Criterio 2:

$$L_{27} = 70{,}88340770, \quad f(L_{27}) = 6{,}12 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{|L_{27} - L_{26}|}{|L_{27}|} = 7{,}88 \cdot 10^{-9}.$$

- Criterio 3:

$$\boxed{L_{33} = 70{,}88340808}, \quad f(L_{33}) = 3{,}49 \cdot 10^{-9}, \quad \frac{|L_{33} - L_{32}|}{|L_{33}|} = 1{,}23 \cdot 10^{-10}.$$

Ejemplo 1

Método de la «Regula–Falsi»

Al aplicar el **Método de la «Regula–Falsi»**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{L_4 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_4) = -1{,}19 \cdot 10^{-10}}, \quad \frac{|L_4 - L_3|}{|L_4|} = 5{,}96 \cdot 10^{-8}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{L_5 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_5) = 5{,}44 \cdot 10^{-14}}, \quad \frac{|L_5 - L_4|}{|L_5|} = 1{,}03 \cdot 10^{-12}.$$

- Criterio 3:

$$L_5 = 70{,}88340808, \quad f(L_5) = 5{,}44 \cdot 10^{-14}, \quad \frac{|L_5 - L_4|}{|L_5|} = 1{,}03 \cdot 10^{-12}.$$

Ejemplo 1

Método de las Aproximaciones Sucesivas

Al aplicar el **Método de las Aproximaciones Sucesivas**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$L_{46} = 70{,}88340809, \quad f(L_{46}) = -9{,}93 \cdot 10^{-9}, \quad \frac{|L_{46} - L_{45}|}{|L_{46}|} = 2{,}26 \cdot 10^{-10}.$$

- Criterio 2:

$$L_{39} = 70{,}88340791, \quad f(L_{39}) = 2{,}82 \cdot 10^{-7}, \quad \frac{|L_{39} - L_{38}|}{|L_{39}|} = 6{,}41 \cdot 10^{-9}.$$

- Criterio 3:

$$L_{47} = 70{,}88340808, \quad f(L_{47}) = 6{,}16 \cdot 10^{-9}, \quad \frac{|L_{47} - L_{46}|}{|L_{47}|} = 1{,}40 \cdot 10^{-10}.$$

Ejemplo 1

Método de Newton–Raphson

Al aplicar el **Método de Newton–Raphson**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$L_4 = 70{,}88340808, \quad f(L_4) = 1{,}18 \cdot 10^{-13}, \quad \frac{|L_4 - L_3|}{|L_4|} = 2{,}96 \cdot 10^{-10}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{L_4 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_4) = 1{,}18 \cdot 10^{-13}}, \quad \frac{|L_4 - L_3|}{|L_4|} = 2{,}96 \cdot 10^{-10}.$$

- Criterio 3:

$$\boxed{L_5 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_5) = 6{,}09 \cdot 10^{-14}}, \quad \frac{|L_5 - L_4|}{|L_5|} = 6{,}52 \cdot 10^{-16}.$$

Ejemplo 1
Método de la Secante

Al aplicar el **Método de la Secante**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{L_4 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_4) = -2{,}49 \cdot 10^{-9}}, \quad \frac{|L_4 - L_3|}{|L_4|} = 8{,}58 \cdot 10^{-8}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{L_5 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_5) = 1{,}42 \cdot 10^{-13}}, \quad \frac{|L_5 - L_4|}{|L_5|} = 2{,}17 \cdot 10^{-12}.$$

- Criterio 3:

$$L_5 = 70{,}88340808, \quad f(L_5) = 1{,}42 \cdot 10^{-13}, \quad \frac{|L_5 - L_4|}{|L_5|} = 2{,}17 \cdot 10^{-12}.$$

Ejemplo 1

Método de Steffensen

Al aplicar el **Método de Steffensen**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{L_3 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_3) = -4{,}41 \cdot 10^{-10}}, \quad \frac{|L_3 - L_2|}{|L_3|} = 6{,}97 \cdot 10^{-6}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{L_4 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_4) = -2{,}79 \cdot 10^{-13}}, \quad \frac{|L_4 - L_3|}{|L_4|} = 4{,}27 \cdot 10^{-12}.$$

- Criterio 3:

$$L_4 = 70{,}88340808, \quad f(L_4) = -2{,}79 \cdot 10^{-13}, \quad \frac{|L_4 - L_3|}{|L_4|} = 4{,}27 \cdot 10^{-12}.$$

Ejemplo 1

Método de Halley

Al aplicar el **Método de Halley**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{L_2 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_2) = 3{,}16 \cdot 10^{-10}}, \quad \frac{|L_2 - L_1|}{|L_2|} = 3{,}43 \cdot 10^{-4}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{L_3 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_3) = 1{,}49 \cdot 10^{-13}}, \quad \frac{|L_3 - L_2|}{|L_3|} = 2{,}75 \cdot 10^{-12}.$$

- Criterio 3:

$$L_3 = 70{,}88340808, \quad f(L_3) = 1{,}49 \cdot 10^{-13}, \quad \frac{|L_3 - L_2|}{|L_3|} = 2{,}75 \cdot 10^{-12}.$$

Ejemplo 1

Método de Chebychev

Al aplicar el **Método de Chebychev**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{L_2 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_2) = -1{,}98 \cdot 10^{-9}}, \quad \frac{|L_2 - L_1|}{|L_2|} = 5{,}82 \cdot 10^{-4}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{L_3 = 70{,}88340808}, \quad \boxed{f(L_3) = -2{,}65 \cdot 10^{-13}}, \quad \frac{|L_3 - L_2|}{|L_3|} = 1{,}73 \cdot 10^{-11}.$$

- Criterio 3:

$$L_3 = 70{,}88340808, \quad f(L_3) = -2{,}65 \cdot 10^{-13}, \quad \frac{|L_3 - L_2|}{|L_3|} = 1{,}73 \cdot 10^{-11}.$$

Ejemplo 1

Podemos graficar solamente algunos de los métodos aplicados:

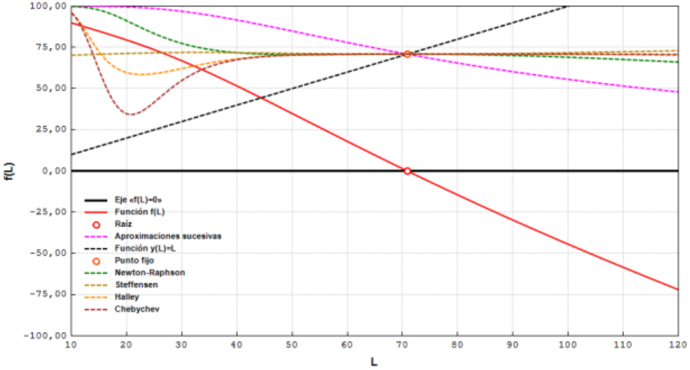

Figura: Métodos aplicados con funciones que pueden representarse gráficamente.

Ejemplo 2

En el diseño de los vehículos todo terreno, es necesario considerar la falla del vehículo al tratar de superar dos tipos de obstáculos. Un tipo de falla recibe el nombre de *falla compleja* y se presenta cuando el vehículo intenta cruzar un obstáculo que causa que la parte inferior del vehículo toque el suelo. El otro tipo recibe el nombre de *falla de nariz* y se presenta cuando el vehículo desciende en una zanja y su nariz toca el suelo.

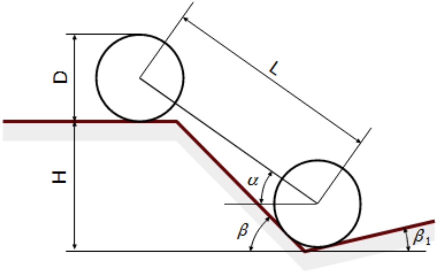

Figura: Esquema para evitar la «falla de nariz».

Ejemplo 2

La figura anterior muestra los componentes relacionados con la *falla de nariz* de un vehículo. En esta referencia, se muestra que el ángulo máximo a que un vehículo puede superar cuando β es el ángulo máximo en el que la *falla compleja* no ocurre satisface la ecuación:

$$F(\alpha) = A_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha + B_1 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha - C_1 \cdot \cos \alpha - E_1 \cdot \operatorname{sen} \alpha,$$

donde:

- $A_1 = L \cdot \operatorname{sen} \beta_1$.
- $B_1 = L \cdot \cos \beta_1$.
- $C_1 = (H + 0{,}5 \cdot D) \cdot \operatorname{sen} \beta_1 - 0{,}5 \cdot D \cdot \operatorname{tg} \beta_1$.
- $E_1 = (H + 0{,}5 \cdot D) \cdot \cos \beta_1 - 0{,}5 \cdot D$.

Ejemplo 2

Tomemos los siguientes datos:

- Distancia entre ejes: $L_1 = 2{,}261$ m.
- Altura del desnivel: $H_1 = 1{,}245$ m.
- Diámetro de la rueda: $D_1 = 1{,}397$ m.
- Ángulo de la pendiente de la zanja: $\beta_1 = 11,5^\circ$.
- $A_1 = 0{,}4508$ m.
- $B_1 = 2{,}2156$ m.
- $C_1 = 0{,}2454$ m.
- $E_1 = 1{,}2060$ m.
- Intervalo: $a = 0{,}1$, $b = 1{,}1$.
- Tolerancia: $\varepsilon = 10^{-8}$.

Ejemplo 2

Podemos graficar la función y ver la raíz:

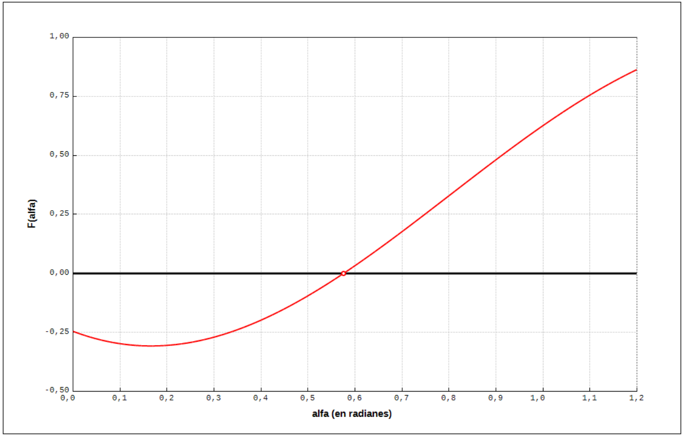

Figura: Gráfico con la función $F(\alpha)$.

Ejemplo 2

Como en el ejemplo anterior, obtendremos el valor buscado de α con los mismos criterios:

- Criterio 1:
$$|F(\alpha_n)| \leq \varepsilon.$$
- Criterio 2:
$$\frac{|\alpha_n - \alpha_{n-1}|}{|\alpha_n|} \leq \varepsilon.$$
- Criterio 3:
$$|\alpha_n - \alpha_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

y un valor máximo de iteraciones: $n = 100$.

Ejemplo 2

Método de la Bisección

Al aplicar el **Método de la Bisección**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{\alpha_{23} = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_{23}) = 3{,}08 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_{23} - \alpha_{22}|}{|\alpha_{23}|} = 8{,}3 \cdot 10^{-1}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{\alpha_{28} = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_{28}) = -1{,}87 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_{28} - \alpha_{27}|}{|\alpha_{28}|} = 6{,}47 \cdot 10^{-9}.$$

- Criterio 3:

$$\alpha_{27} = 0{,}57556912, \quad F(\alpha_{27}) = -6{,}82 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_{27} - \alpha_{26}|}{|\alpha_{27}|} = 1{,}29 \cdot 10^{-8}.$$

Ejemplo 2

Método de la «Regula–Falsi»

Al aplicar el **Método de la «Regula–Falsi»**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{\alpha_9 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_9) = -1{,}04 \cdot 10^{-9} \text{ m}}, \quad \frac{|\alpha_9 - \alpha_8|}{|\alpha_9|} = 1{,}61 \cdot 10^{-8}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{\alpha_{10} = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_{10}) = -8{,}12 \cdot 10^{-11} \text{ m}}, \quad \frac{|\alpha_{10} - \alpha_9|}{|\alpha_{10}|} = 1{,}25 \cdot 10^{-9}.$$

- Criterio 3:

$$\alpha_9 = 0{,}57556913, \quad F(\alpha_9) = -1{,}04 \cdot 10^{-9} \text{ m}, \quad \frac{|\alpha_9 - \alpha_8|}{|\alpha_9|} = 1{,}61 \cdot 10^{-8}.$$

Ejemplo 2

Método de las Aproximaciones Sucesivas

Al aplicar el **Método de las Aproximaciones Sucesivas**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\alpha_{15} = 0{,}57556912, \quad F(\alpha_{15}) = -7{,}91 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_{15} - \alpha_{14}|}{|\alpha_{15}|} = 4{,}18 \cdot 10^{-8}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{\alpha_{17} = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_{17}) = -8{,}55 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_{17} - \alpha_{16}|}{|\alpha_{17}|} = 4{,}52 \cdot 10^{-9}.$$

- Criterio 3:

$$\boxed{\alpha_{16} = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_{16}) = 2{,}60 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_{16} - \alpha_{15}|}{|\alpha_{16}|} = 1{,}37 \cdot 10^{-8}.$$

Ejemplo 2

Método de Newton–Raphson

Al aplicar el **Método de Newton–Raphson**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{\alpha_4 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_4) = 9{,}82 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_4 - \alpha_3|}{|\alpha_4|} = 1{,}49 \cdot 10^{-4}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{\alpha_6 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_6) = 2{,}17 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_6 - \alpha_5|}{|\alpha_6|} = 9{,}04 \cdot 10^{-16}.$$

- Criterio 3:

$$\boxed{\alpha_5 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_5) = 9{,}75 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 1{,}28 \cdot 10^{-8}.$$

Ejemplo 2

Método de la Secante

Al aplicar el **Método de la Secante**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{\alpha_6 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_6) = 2{,}02 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_6 - \alpha_5|}{|\alpha_6|} = 1{,}88 \cdot 10^{-6}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{\alpha_7 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_7) = 1{,}30 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_7 - \alpha_6|}{|\alpha_7|} = 2{,}64 \cdot 10^{-10}.$$

- Criterio 3:

$$\alpha_7 = 0{,}57556913, \quad F(\alpha_7) = 1{,}30 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_7 - \alpha_6|}{|\alpha_7|} = 2{,}64 \cdot 10^{-10}.$$

Ejemplo 2

Método de Steffensen

Al aplicar el **Método de Steffensen**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\alpha_4 = -6{,}48389817, \quad F(\alpha_4) = -5{,}73 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_4 - \alpha_3|}{|\alpha_4|} = 9{,}50 \cdot 10^{-6}.$$

- Criterio 2:

$$\alpha_5 = -6{,}48389817, \quad F(\alpha_5) = -2{,}82 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 5{,}26 \cdot 10^{-10}.$$

- Criterio 3:

$$\alpha_5 = -6{,}48389817, \quad F(\alpha_5) = -2{,}82 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 5{,}26 \cdot 10^{-10}.$$

Ejemplo 2

Método de Halley

Al aplicar el **Método de Halley**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{\alpha_4 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_6) = 2{,}93 \cdot 10^{-15} \text{ m}}, \quad \frac{|\alpha_4 - \alpha_3|}{|\alpha_4|} = 1{,}80 \cdot 10^{-8}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{\alpha_5 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_5) = 2{,}28 \cdot 10^{-15} \text{ m}}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 9{,}42 \cdot 10^{-16}.$$

- Criterio 3:

$$\alpha_5 = 0{,}57556913, \quad F(\alpha_5) = 2{,}28 \cdot 10^{-15} \text{ m}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 9{,}42 \cdot 10^{-16}.$$

Ejemplo 2

Método de Chebychev

Al aplicar el **Método de Chebychev**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\alpha_4 = 0{,}57556913, \quad F(\alpha_6) = 2{,}82 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_4 - \alpha_3|}{|\alpha_4|} = 8{,}18 \cdot 10^{-6}.$$

- Criterio 2:

$$\alpha_5 = 0{,}57556913, \quad F(\alpha_5) = 2{,}82 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 0.$$

- Criterio 3:

$$\alpha_5 = 0{,}57556913, \quad F(\alpha_5) = 2{,}82 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 0.$$

Ejemplo 2

Podemos graficar solamente algunos de los métodos aplicados:

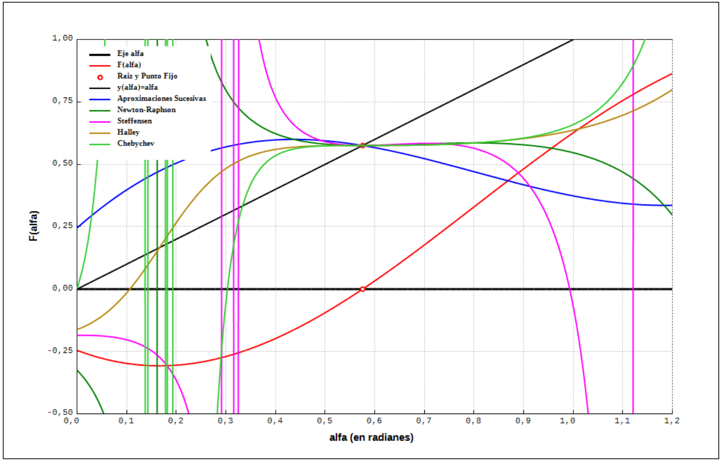

Figura: Métodos aplicados con funciones que pueden representarse gráficamente.

Ejemplo 2

Método de Steffensen

Si cambiamos el inetervalo a $(0{,}3; 0{,}9)$, al aplicar el **Método de Steffensen**, obtenemos los siguientes resultados:

- Criterio 1:

$$\boxed{\alpha_5 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_5) = 3{,}03 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_5 - \alpha_4|}{|\alpha_5|} = 6{,}52 \cdot 10^{-5}.$$

- Criterio 2:

$$\boxed{\alpha_6 = 0{,}57556913}, \quad \boxed{F(\alpha_6) = -9{,}21 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}}, \quad \frac{|\alpha_6 - \alpha_5|}{|\alpha_6|} = 3{,}96 \cdot 10^{-9}.$$

- Criterio 3:

$$\alpha_6 = 0{,}57556913, \quad F(\alpha_6) = -9{,}21 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}, \quad \frac{|\alpha_6 - \alpha_5|}{|\alpha_6|} = 3{,}96 \cdot 10^{-9}.$$

Bibliografía

- Burden, R. L., Faires, J. D. & Burden, A. M. *Análisis Numérico*. Décima Edición, CENGAGE Learning, 2016.
- Samarski, A. A. *Introducción a los métodos numéricos*. Editorial Mir, 1986.
- Higham, N.J. *Accuracy and stability of numerical algorithms.* SIAM. 1996.
- Ezquerro, J. A., Gutiérrez, J. M., Hernández, M. A. y Salanova, M. A. *El método de Halley: posiblemente el método más redescubierto del mundo*. Universidad de La Rioja, España. 2001.